A new projection method for finding the closest point in the intersection of convex sets

Fracisco J. Aragón Artacho · Rubén Campoy

Keywords Best approximation problem · Convex set · Projection · Reflection · Nonexpansive mapping · Douglas–Rachford algorithm · Feasibility problem
MSC2010: 47H09 · 47N10 · 90C25

1 Introducción

Los *algoritmos de proyección* son herramientas útiles y de fácil implementación para resolver *problemas de factibilidad*. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y dados dos conjuntos $A, B \subseteq \mathcal{H}$, el problema de factibilidad consiste en obtener un punto en la intersección de estos conjuntos, es decir,

$$\text{Encontrar } x \in A \cap B.$$

Puede ocurrir que estemos interesados en encontrar, no solo un punto cualquiera en la intersección de los conjuntos, sino el más cercano a un punto dado $q \in \mathcal{H}$. Esta variante del problema se conoce como el *problema de mejor aproximación* y se define formalmente como

$$\text{Encontrar } w \in A \cap B, \text{ tal que } \|w - q\| = \inf \{\|x - q\| : x \in A \cap B\}.$$

Muchos problemas reales se pueden modelizar como problemas de factibilidad, aunque obtener una formulación apropiada puede requerir cierta creatividad. En muchas situaciones prácticas, abordar esta intersección en sí misma resulta una tarea complicada, mientras que la proyección sobre cada uno de los conjuntos se puede calcular de forma eficiente. Los algoritmos de proyección utilizan estas proyecciones de forma iterativa, definiendo una sucesión convergente cuyo límite permite resolver el problema.

2 Estado del Arte

Probablemente, el algoritmo de proyección más conocido es el *método de proyecciones alternadas* [8, 13, 18]. Es el método más simple e intuitivo ya que, como su propio nombre indica, cada iteración consiste en proyectar de forma alternada sobre los conjuntos que describen el problema. Específicamente, dado cualquier punto inicial $x_0 \in \mathcal{H}$, la sucesión se genera mediante la recurrencia

$$x_{k+1} = P_B P_A(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Cuando los conjuntos que definen el problema son cerrados y convexos, la sucesión generada converge débilmente a un punto en la intersección.

Otro método de proyección diferente para resolver problemas de factibilidad es comúnmente conocido como el algoritmo de Douglas–Rachford [11, 16]. La iteración del algoritmo se define recursivamente mediante

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}(2P_B - \mathrm{Id})(2P_A - \mathrm{Id})(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde Id representa el operador identidad. Dado un conjunto $C \subseteq \mathcal{H}$, el operador $2P_C - \mathrm{Id} =: R_C$ se conoce como el *operador reflexión* sobre C. Debido a su interpretación geométrica, el método es también conocido como el *algoritmo de reflexiones alternadas ponderadas*. De nuevo, si los conjuntos son cerrados y convexos, la sucesión generada por el algoritmo converge débilmente a un punto $x^\star$ tal que $P_A(x^\star) \in A \cap B$, resolviendo así el problema de factibilidad. En los últimos años el algoritmo de Douglas–Rachford ha despertado un gran interés, debido en parte a su buen comportamiento en escenarios no convexos.

En el caso particular de que los conjuntos que definen el problema sean subespacios afines cerrados, los dos métodos descritos anteriormente no solo encuentran un punto cualquiera en la intersección, sino que dicho punto es, de hecho, el más cercano al punto inicial. De esta forma, permiten resolver problemas de mejor aproximación en este contexto. Sin embargo, esto no ocurre cuando consideramos conjuntos cerrados y convexos arbitrarios. Existen otros métodos de proyección específicos para resolver este problema con conjuntos más generales. Uno de ellos es el *algoritmo de Dykstra* [7, 12], que surge como una modificación apropiada del método de proyecciones alternadas, cuya sucesión generada converge fuertemente a la proyección del punto inicial sobre la intersección. Otras posibilidades son los *algoritmos de tipo Haugazeau* [15], el *algoritmo de Halpern* [14], o el *algoritmo de Combettes* [9]. En todos estos *algoritmos de mejor aproximación*, a excepción del método de Combettes, la recursión deja de ser una iteración de punto fijo de la forma $x_{k+1} = T(x_k)$, para cierto operador $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. En el caso del algoritmo de Combettes, se presenta en un contexto más general donde se busca evaluar el resolvente de la suma de dos operadores maximales. Aunque su iteración es de punto fijo, al considerar el caso particular de problemas de mejor aproximación, es difícil dar una interpretación geométrica de esta.

3 Contribuciones

En este trabajo proponemos una modificación del método de Douglas–Rachford, obteniendo un nuevo algoritmo de proyección que permite resolver problemas de mejor aproximación, en lugar de simplemente problemas de factibilidad. Nuestro enfoque consiste en modificar las reflexiones sobre los conjuntos. Concretamente, cada operador reflexión en el método de Douglas–Rachford se remplaza por lo que denominamos *operador reflexión modificado*, el cual se define para un conjunto $C \subseteq \mathcal{H}$ como

$$2\beta P_C - \mathrm{Id}, \qquad \text{con } \beta \in \,]0,1[.$$

Por eso, llamamos al nuevo algoritmo el *método de reflexiones modificadas alternadas ponderadas* (abreviado *AAMR*, del inglés *averaged alternating modified reflections method*). Dado un punto $q \in \mathcal{H}$, fijados dos parámetros $\alpha \in \,]0,1]$ y $\beta \in \,]0,1[$, y dado cualquier punto inicial $x_0 \in \mathcal{H}$, el nuevo método AAMR se define iterativamente mediante la recurrencia

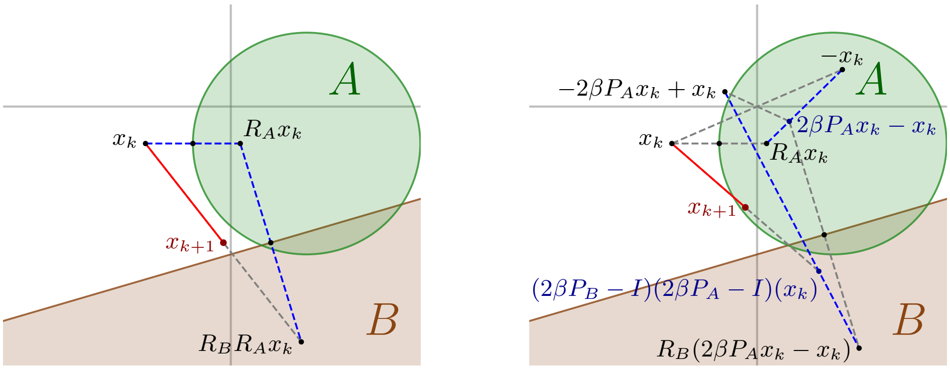
$$x_{k+1} := (1-\alpha)x_k + \alpha(2\beta P_{B-q} - \mathrm{Id})(2\beta P_{A-q} - \mathrm{Id})(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

De esta forma, el AAMR se construye como una iteración de punto fijo generada por el operador $T := (1-\alpha)\,\mathrm{Id} + \alpha(2\beta P_{B-q} - \mathrm{Id})(2\beta P_{A-q} - \mathrm{Id})$. Además, cada operador reflexión modificado se obtiene como una combinación convexa entre el proyector y el operador $-\mathrm{Id}$ (ver Figura 1).

Si A y B son conjuntos cerrados y convexos tal que $A \cap B \neq \emptyset$, bajo una cualificación de restricciones en el punto de interés, probamos que la sucesión generada por el algoritmo converge débilmente a un punto $x^\star$ tal que

$$P_A(q + x^\star) = P_{A\cap B}(q),$$

resolviendo así el problema de mejor aproximación (ver Figura 2). Más aún, la sucesión proyectada $(P_A(q + x_k))_{k=0}^{\infty}$ converge en norma a $P_{A\cap B}(q)$. Una condición suficiente para garantizar la



(a) DR (b) AAMR

Figura 1: Visualización de la iteración generada por los algoritmos DR y AAMR.

cualificación de restricciones es la propiedad conocida como *strong CHIP* (del inglés *strong conical hull intersection property*), que ha sido ampliamente estudiada en la literatura. De hecho, esta propiedad caracteriza la convergencia del método para todo punto en el espacio.

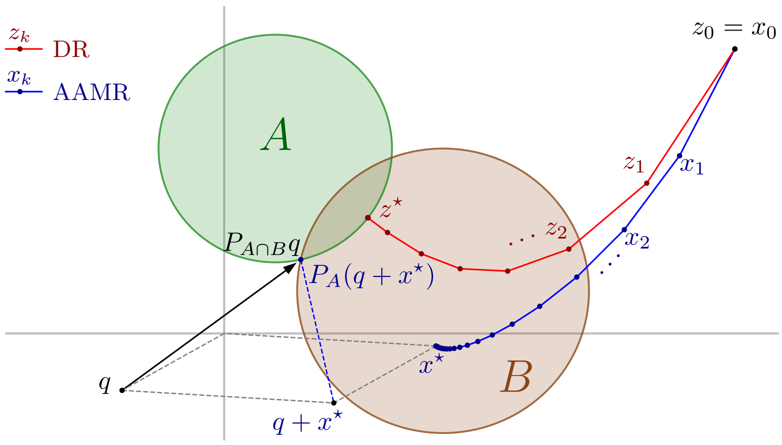


Figura 2: Sucesiones generadas por los algoritmos DR y AAMR desde el mismo punto inicial.

Finalmente, comparamos el nuevo AAMR con otros métodos de proyección en problemas de mejor aproximación definidos por subespacios mediante varios experimentos numéricos. Los resultados muestran como, bajo una elección adecuada de los parámetros, el nuevo algoritmo supera a los otros métodos considerados. Además, estudiamos cómo escoger dichos parámetros de forma óptima, lo que permite aumentar la ventaja del AAMR sobre el resto de métodos.

4 Conclusiones e Impacto del trabajo

En este trabajo se propone un nuevo algoritmo de proyección que permite encontrar el punto más cercano en la intersección de conjuntos convexos. La iteración se puede interpretar geométricamente como una modificación adecuada del algoritmo de Douglas–Rachford. Desde el punto de vista teórico se basa en una iteración de punto fijo, lo que permite utilizar herramientas en este campo para analizar su convergencia. Los experimentos numéricos realizados vislumbran la superioridad del nuevo método con respecto a otros existentes. El artículo se encuentra publicado en el volumen 69 (2018) de la revista *Computational Optimization and Applications* [3].

Los prometedores resultados obtenidos mediante experimentos computacionales han sido contrastados de forma teórica en [5]. La tasa de convergencia lineal del método depende del ángulo de Friedrichs que forman los subespacios, así como de los parámetros que definen el esquema. Cuando estos parámetros son elegidos de forma óptima, la tasa obtenida resulta ser la mejor entre las tasas conocidas de otros algoritmos de proyección clásicos. En un contexto más práctico, el AAMR ha sido utilizado en [6], bajo el nombre *algoritmo Aragón Artacho–Campoy*, para resolver problemas de control óptimo en tiempo continuo. Los resultados numéricos confirman el buen comportamiento del AAMR en comparación con el resto de métodos utilizados.

El nuevo algoritmo AAMR se presenta como una modificación del método de Douglas–Rachford. Este último puede aplicarse de forma más general para encontrar un cero en la suma de dos operadores monótonos maximales. Dicha extensión se obtiene remplazando proyectores sobre conjuntos por resolventes de operadores. De la misma forma, hemos extendemos el algoritmo AAMR a este contexto más general en [4]. Esto da lugar a un nuevo método de descomposición, que permite calcular el resolvente de la suma de dos operadores monótonos maximales, utilizando evaluaciones individuales de los resolventes de cada operador. Este nuevo algoritmo está recibiendo una gran atención y se ha convertido en un tema de investigación activa. Por ejemplo, el comportamiento asintótico se ha analizado en [1], el método ha sido generalizado en [10] para operadores débilmente monótonos, y una versión acelerada del mismo ha sido propuesta en [17].

Referencias

[1] S. Alwadani, H. H. Bauschke, W. M. Moursi, and X. Wang: On the asymptotic behaviour of the Aragón Artacho–Campoy algorithm. *Oper. Res. Lett.*, 46(6):585–587, 2018.

[2] F. J. Aragón Artacho, J. M. Borwein, and M. K. Tam: Recent results on Douglas–Rachford methods for combinatorial optimization problem. *J. Optim. Theory. Appl.*, 163(1):1–30, 2014.

[3] F. J. Aragón Artacho and R. Campoy: A new projection method for finding the closest point in the intersection of convex sets. *Comput. Optim. Appl.*, 69(1):99–132, 2018.

[4] F. J. Aragón Artacho and R. Campoy: Computing the resolvent of the sum of maximally monotone operators with the averaged alternating modified reflections algorithm. *J. Optim. Theory. Appl.*, 181(1):709–726, 2019.

[5] F. J. Aragón Artacho and R. Campoy: Optimal rates of linear convergence of the averaged alternating modified reflections method for two subspaces. *Numer. Alg.*:1–25, 2018. DOI: 10.1007/s11075-018-0608-x.

[6] H. H. Bauschke, R. S. Burachik, and C. Y. Kaya: Constraint splitting and projection methods for optimal control of double integrator, 2018. arXiv: 1804.03767.

[7] J. P. Boyle and R. L. Dykstra: A method for finding projections onto the intersection of convex sets in Hilbert spaces. In R. Dykstra, T. Robertson, and F. T. Wright, editors, *Advances in Order Restricted Statistical Inference*, volume 37 of *Lecture Notes in Statistics*, pages 28–47. Springer, New York, 1986.

[8] L. M. Bregman: The method of successive projection for finding a common point of convex sets. *Soviet Math. Dokl.*, 162(3):688–692, 1965.

[9] P. L. Combettes: Iterative construction of the resolvent of a sum of maximal monotone operators. *J. Convex Anal.*, 16(4):727–748, 2009.

[10] M. N. Dao and H. M. Phan: Computing the resolvent of the sum of operators with application to best approximation problems. *Optim. Lett.*:1–13, 2019. DOI: 10.1007/s11590-019-01432-x.

[11] J. Douglas and H. H. Rachford: On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82:421–439, 1956.

[12] R. L. Dykstra: An algorithm for restricted least squares regression. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 78(384):837–842, 1983.

[13] I. Halperin: The product of projection operators. *Acta Sci. Math.*, 23:96–99, 1962.

[14] B. Halpern: Fixed points of nonexpanding maps. *Bulletin of the AMS*, 73(6):957–961, 1967.

[15] Y. Haugazeau: *Sur les inequality variationnelles etla minimmization de fonctionnelles convexes*. Thèse, Université de Paris, France, 1968.

[16] P. L. Lions and B. Mercier: Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators. *SIAM J. Numer. Anal.*, 16(6):964–979, 1979.

[17] S.-y. Matsushita: On the convergence rate improvement of a splitting method for finding the resolvent of the sum of maximal monotone operators, 2018. arXiv: 1809.04250.

[18] J. von Neumann: *Functional Operators II: The Geometry of Orthogonal Spaces*. Princeton University Press, 1950. (Reprint of mimeographed lecture notes first distributed in 1933).